УДК 514.75(08)

Ю. И. Попов

СИЛЬНО ВЗАИМНЫЕ ТРЕХСОСТАВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассматривается построение общей теории специального класса ($\mathscr{VH}$ -распределения) регулярных трехсоставных распределений ($\mathscr{H}$ -распределения [1]) проективного пространства P_n, состоящие из базисного распределения 1-го рода r-мерных плоскостей Λ_r, оснащающего распределения 1-го рода m-мерных плоскостей M_m $(m > r)$ и оснащающего распределения 1-го рода гиперплоскостных элементов (гиперплоскостей) H_{n-1} с отношением инцидентности их соответствующих элементов в общем центре $X : X \in \Lambda \subset M \subset H$. Эта тройка распределений анализируется как единое погруженное многообразие. В силу указанного строения $\mathscr{VH}$ -распределения в геометрии этого многообразия имеются аналогии с некоторыми фактами из геометрии m-мерных линейных элементов [2], (n-1)-мерных линейных элементов [3] и гиперполосных распределений [4]. Однако эти аналогии не относятся к геометрии только базисного или оснащающих распределений взятых в отдельности.

Construction of a general theory of a special class ($\mathscr{VH}$ -distribution) of the regular threefold distributions ($\mathscr{H}$ -distribution [1]) of the projective space P_n consisting of a basic distribution of the 1st kind of r-dimensional planes Λ_r are equipped with the distribution of the 1st kind of m-dimensional planes M_m $(m > r)$ and equip distribution 1st the first kind of hyperplane elements (hyperplanes) H_{n-1} with the ratio of the incidence of the corresponding elements in the common center $X : X \in \Lambda \subset M \subset H$ is considered in this article. In this paper, these three distributions is considered as a immersed manifold. By virtue of the $\mathscr{VH}$ -distribution structure in the geometry of the manifold are similar to some of the facts from the geometry of m-dimensional linear elements [2], (n-1)-dimensional linear elements [3] and hyperband distribution [4]. However, the analogy does not relate to the geometry of the base only or equipping distributions taken separately.

Ключевые слова: распределение, тензор неголономности, голономность распределения, гиперполоса, взаимность распределений, сопряженная система плоскостей, тензор, квазитензор, подрасслоение.

Key words: distribution, nonholonomic tensor, holonomic distribution, hyperband, tensor, quasitensor, duality of distribution, adjoint surface system, quasinormal, subbundle.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2015. Вып. 10. С. 62 – 76.

1. Во всей работе использована следующая схема индексов:

$$I,J,K,L=\overline{1,n};\ \bar I,\bar J,\bar K,\bar L=\overline{0,n}; p,q,r,s,t=\overline{1,r},\ \bar p,\bar q,\bar r,\bar s,\bar t=\overline{0,r};$$

$$i,j,\ k,l=\overline{r+1,m};\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon=\overline{m+1,n-1};$$

$$a,b,c,d=\overline{1,m};\ \sigma,\ \rho,\phi=\overline{1,\ n};$$

$$u,v,w,x,y,z=\overline{r+1,n-1};\hat u,\hat v=\overline{r+1,n};$$

$$A,B,C,F=\{\overline{1,r};\overline{m+1,n-1}\};\ \hat p,\ \hat q,\ \hat r,\ \hat s=\{\overline{1,r};n\};$$

$$\hat A,\hat B,\hat C,\hat F=\{\overline{1,r};\overline{m+1;n}\};\ s=m-r;\ \bar\sigma,\ \bar\rho,\ \bar\phi=\overline{0,\ n-1};$$

$$\hat\alpha,\ \hat\beta,\ \hat\gamma=\overline{m+1,n};\ \hat i,\ \hat j=\{\overline{r+1,m};n\}.$$

2. Оператор ∇ дифференцирования такой же, как и в работе [1].

3. Символом δ обозначим дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм ω_I^K при фиксированных параметрах через π_I^K. В этом случае оператор обозначается символом ∇_δ.

§ 1. Дифференциальные уравнения трехсоставного $\mathscr{H}$ -распределения проективного пространства

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $\{A_{\bar I}\}$, состоящему из ($n+1$) аналитических точек $A_{\bar I}$. Дифференциальные уравнения инфинитезимального движения репера имеют вид

$$dA_{\bar I}=\omega_{\bar I}^{\bar K}A_{\bar K},$$

где формы Пфаффа $\omega_{\bar I}^{\bar K}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega_{\bar I}^{\bar K}=\omega_{\bar I}^{\bar L}\wedge\omega_{\hat L}^{\bar K}$$

и линейному соотношению $\sum\limits_{\bar I=0}^{n}\omega_{\bar I}^{\bar I}=0$.

Потребуем, чтобы в некоторой области $U\subset P_n$ для любого центра X имеют место следующие соотношения инцидентности:

$$X\in\Lambda_r\subset M_m\subset H_{n-1}.$$

Проведем канонизацию репера $\{A_{\bar I}\}:\ X\equiv A_0$, грань $[A_{\bar\sigma}]$ совместим с плоскостью $H_{n-1}(A_0)$ $\mathscr{H}$ -распределения так, чтобы $\{A_p\}\subset\Lambda(A_0);\{A_a\}\subset M(A_0)$. Такой репер $\{A_{\bar I}\}$ является репером нулевого порядка R_0.

Относительно репера R_0 дифференциальные уравнения трехсоставного распределения $H \subset P_n$ имеют вид [1]

$$\omega_p^n = \Lambda_{pK}^n \omega_0^K, \ \ \omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K, \ \ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha K}^n \omega_0^K,$$
$$\omega_p^\alpha = \Lambda_{pK}^\alpha \omega_0^K, \ \ \omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K, \ \ \omega_p^i = \Lambda_{pK}^i \omega_0^K, \quad (1)$$

$$\nabla \Lambda_{pK}^n + \Lambda_{pK}^n \omega_0^0 - \delta_K^n \omega_p^0 = \Lambda_{pKL}^n \omega_0^L,$$

$$\nabla \Lambda_{iK}^n + \Lambda_{iK}^n \omega_0^0 - \Lambda_{qK}^n \omega_i^q - \delta_K^n \omega_i^0 = \Lambda_{iKL}^n \omega_0^L,$$

$$\nabla \Lambda_{\alpha K}^n + \Lambda_{\alpha K}^n \omega_0^0 - \Lambda_{qK}^n \omega_\alpha^q - \Lambda_{iK}^n \omega_\alpha^i - \delta_K^n \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha KL}^n \omega_0^L,$$

$$\nabla \Lambda_{pK}^\alpha + \Lambda_{pK}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{pK}^n \omega_n^\alpha - \delta_K^\alpha \omega_p^0 = \Lambda_{pKL}^\alpha \omega_0^L, \quad (2)$$

$$\nabla \Lambda_{iK}^\alpha - \Lambda_{IK}^\alpha \omega_0^0 - \Lambda_{pK}^\alpha \omega_i^p + \Lambda_{iK}^n \omega_n^\alpha - \delta_K^\alpha \omega_i^0 = \Lambda_{iKL}^\alpha \omega_0^L,$$

$$\nabla \Lambda_{pK}^i + \Lambda_{pK}^i \omega_0^0 + \Lambda_{pK}^\alpha \omega_\alpha^i + \Lambda_{pK}^n \omega_n^i - \delta_K^i \omega_p^0 = \Lambda_{pKL}^i \omega_0^L.$$

Имеет место [1]

Теорема 1. *$\mathcal{H}$ -распределение, заданное в репере R_0 (2), (3), существует с произволом $(n-m-1)(m+1)+r(m-r)+m$ функций n аргументов.*

2. Проведем канонизацию репера R_0 следующим образом. Рассмотрим в каждом центре A_0 плоскости $\Phi(A_0) \overset{def}{=} \Phi_{n-r-1}(A_0)$, $E(A_0) \overset{def}{=} E_{n-m-1}(A_0)$, $\Psi(A_0) \overset{def}{=} \Psi_{n-s-1}(A_0)$ — характеристики гиперплоскости $H(A_0)$, полученные при смещении центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих соответственно Λ, M и L-распределению. Поместим вершины репера R_0 следующим образом: $\{A_\alpha\} \subset E(A_0)$; $\{A_i\} \subset L(A_0)$; $\{A_p\} \subset \Lambda(A_0)$, $A_n \notin H_{n-1}(A_0)$. Выбранный репер является репером первого порядка R_1, в котором

$$\Lambda_{ip}^n = 0; \ \ \Lambda_{\alpha p}^n = 0; \ \ \Lambda_{\alpha i}^n = 0; \ \ \Lambda_{\alpha p}^n = 0. \quad (3)$$

Кроме того, потребуем

a) взаимность Λ-распределения [4], то есть r-мерная характеристика $X_r(A_0)$ гиперплоскости $H_{n-1}(A_0)$, полученная при смещении центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих Φ-распределению, и плоскость $\Lambda_r(A_0)$ совпадают, что приводит к условиям

$$\Lambda_{pi}^n = 0; \ \ \Lambda_{p\alpha}^n = 0. \quad (4)$$

b) Взаимность L-распределения. Откуда следует

$$\Lambda_{ip}^n = 0; \ \ \Lambda_{i\alpha}^n = 0. \quad (5)$$

c) Взаимность M-распределения. Тогда имеем

$$\Lambda_{\alpha p}^n = 0; \ \ \Lambda_{\alpha i}^n = 0. \quad (6)$$

Определение. $\mathcal{H}$ -распределение, удовлетворяющее условиям (5) – (7), назовем *сильно взаимным* трехсоставным распределением или, кратко, $\mathcal{VH}$ -распределением.

Определение. В каждом центре A_0 $\mathcal{VH}$ -распределения плоскости $(\Lambda;\Phi)$, $(L;\Psi)$, (E,M), которые удовлетворяют условиям (5) – (7), назовем *попарно взаимными*.

Определение. Распределения плоскостей $\Lambda(A_0)$, $L(A_0)$, $E(A_0)$, $\Phi(A_0)$, $\Psi(A_0)$, $M(A_0)$, $H(A_0)$ назовем *основными структурными подрасслоениями* данного $\mathcal{VH}$ -распределения.

В каждом центре A_0 $\mathcal{VH}$ -распределения имеют место следующие отношения инцидентности линейных элементов основных структурных подрасслоений данного $\mathcal{VH}$ -распределения [1]

$$[\Lambda;L]=M;\ [L;E]=\Phi;\ [\Lambda;E]=\Psi;$$

$$\Phi\cap M=L;\ \Psi\cap\Phi=E;\ \Psi\cap M=\Lambda.$$

В выбранном репере 1-го порядка R_1 дифференциальные уравнения $\mathcal{VH}$ -распределения имеют следующий вид:

$$\omega_p^n=\Lambda^n_{p\hat{q}}\omega_0^{\hat{q}};\ \omega_i^n=\Lambda^n_{i\hat{j}}\omega_0^{\hat{j}};\ \omega_\alpha^n=\Lambda^n_{\alpha\hat{\beta}}\omega_0^{\hat{\beta}};$$

$$\omega_p^\alpha=\Lambda^\alpha_{pK}\omega_0^K;\ \ \omega_p^i=\Lambda^i_{pK}\omega_0^K;\ \omega_i^\alpha=\Lambda^\alpha_{iK}\omega_0^K; \qquad (7)$$

$$\omega_\alpha^i=\Lambda^i_{\alpha K}\omega_0^K;\ \omega_\alpha^p=\Lambda^p_{\alpha K}\omega_0^K;\ \omega_i^p=\Lambda^p_{iK}\omega_0^K.$$

Отметим, что величины $\Lambda^p_{\alpha K}$, $\Lambda^i_{\alpha K}$, Λ^p_{iK} являются компонентами геометрического объекта 2-го порядка $\mathcal{VH}$ -распределения.

Продолжение уравнений (7) приводит к дифференциальным уравнениям, которым подчинены компоненты фундаментального объекта 2-го порядка

$$\nabla\Lambda^n_{pq}+\Lambda^n_{pq}\omega_0^0=\Lambda^n_{pqL}\omega_0^L,$$

$$\nabla\Lambda^n_{pn}+\Lambda^n_{pn}\omega_0^0-\Lambda^n_{pq}\omega_n^q-\omega_p^0=\Lambda^n_{pnL}\omega_0^L,$$

$$\nabla\Lambda^n_{ij}+\Lambda^n_{ij}\omega_0^0=\Lambda^n_{ijL}\omega_0^L,$$

$$\nabla\Lambda^n_{in}+\Lambda^n_{in}\omega_0^0-\Lambda^n_{ij}\omega_n^j-\omega_i^0=\Lambda^n_{inL}\omega_0^L,$$

$$\nabla\Lambda^n_{\alpha\beta}+\Lambda^n_{\alpha\beta}\omega_0^0=\Lambda^n_{\alpha\beta L}\omega_0^L, \quad (8)$$

$$\nabla\Lambda^n_{\alpha n}+\Lambda^n_{\alpha n}\omega_0^0-\Lambda^n_{\alpha\beta}\omega_n^\beta-\omega_\alpha^0=\Lambda^n_{\alpha nL}\omega_0^L,$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{pK}+\Lambda^\alpha_{pK}\omega_0^0+\Lambda^n_{p\hat{q}}\delta^{\hat{q}}_K\omega_n^\alpha-\delta^\alpha_K\omega_p^0=\Lambda^\alpha_{pKL}\omega_0^L,$$

$$\nabla\Lambda^p_{\alpha K}+\Lambda^p_{\alpha K}\omega_0^0+\Lambda^n_{\alpha K}\omega_n^p-\delta^p_K\omega_\alpha^0=\Lambda^p_{\alpha KL}\omega_0^L,$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{iK}+\Lambda^\alpha_{iK}\omega_0^0+\Lambda^n_{i\hat{j}}\delta^{\hat{j}}_K\omega_n^\alpha-\delta^\alpha_K\omega_i^0=\Lambda^\alpha_{iKL}\omega_0^L,$$

$$\nabla \Lambda^i_{\alpha K} + \Lambda^i_{\alpha K}\omega^0_0 + \Lambda^n_{\alpha K}\omega^i_n - \delta^i_K \omega^0_\alpha = \Lambda^i_{\alpha KL}\omega^L_0 ,$$

$$\nabla \Lambda^i_{pK} + \Lambda^i_{pK}\omega^0_0 + \Lambda^n_{p\hat{q}}\delta^{\hat{q}}_K \omega^i_n - \delta^i_K \omega^0_p = \Lambda^i_{pKL}\omega^L_0 ,$$

$$\nabla \Lambda^p_{iK} + \Lambda^p_{iK}\omega^0_0 + \Lambda^n_{iK}\omega^p_n - \delta^p_K \omega^0_i = \Lambda^p_{iKL}\omega^L_0 .$$

3. Исследуем систему дифференциальных уравнений (7—8), определяющую $\mathscr{H}$ -распределение в проективном пространстве P_n.

Чистое замыкание этой системы имеет вид

$$\Delta\Lambda^n_{p\hat{q}} \wedge \omega^{\hat{q}}_0 = 0 , \ \Delta\Lambda^n_{\hat{i}\hat{j}} \wedge \omega^{\hat{j}}_0 = 0 , \ \Delta\Lambda^\alpha_{pK} \wedge \omega^K_0 = 0 ,$$

$$\Delta\Lambda^\alpha_{iK} \wedge \omega^K_0 = 0 , \ \Delta\Lambda^n_{\alpha\hat{\beta}} \wedge \omega^{\hat{\beta}}_0 = 0 , \ \Delta\Lambda^p_{\alpha K} \wedge \omega^K_0 = 0 , \quad (9)$$

$$\Delta\Lambda^i_{\alpha K} \wedge \omega^K_0 = 0 , \ \Delta\Lambda^i_{pK} \wedge \omega^K_0 = 0 , \ \Delta\Lambda^p_{iK} \wedge \omega^K_0 = 0 .$$

Найдем число Q системы (10).

Рассмотрим 3 случая.

а) Если $n-m \geq m-r \geq r$, то в этом случае характеры системы (9) имеют вид

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{r+1} = (n-1) + A , \ s_{r+2} = s_{r+3} = \ldots = s_{m-r+1} = (n-r-1) + A ,$$

$$s_{m-r+2} = s_{m-r+3} = \ldots = s_{n-m} = (n-m-1) + A , \ s_{n-m+1} = s_{n-m+2} = \ldots = s_n = A ,$$

где $A = 2(n-m-1)\cdot m + 2r(m-r)$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} Q &= [s_1 + 2s_2 + \ldots + (r+1)s_{r+1}] + [(r+2)s_{r+2} + \ldots + (m-r+1)s_{m-r+1}] + \\ &+ [(m-r+2)s_{m-r+2} + \ldots + (n-m)s_{n-m}] + [(n-m+1)s_{n-m+1} + \ldots + ns_n] = \\ &= \frac{(r+2)(r+1)}{2}(n-1) + \frac{(m+3)(m-2r)}{2}(n-r-1) + \\ &+ \frac{(n-r+2)(n-2m+r-1)}{2}(n-m-1) + \frac{(n+1)n}{2}A. \end{aligned}$$

b) Если $n-m \geq r \geq n-m$, то характеры системы (9) примут вид

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{n-m} = (n-1) + A ,$$

$$s_{n-m+1} = s_{n-m+2} = \ldots = s_{r+1} = m + A ,$$

$$s_{r+2} = s_{r+3} = \ldots = s_{m-r+1} = (m-r) + A ,$$

$$s_{m-r+2} = s_{m-r+3} = \ldots = s_n = A .$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q &= [s_1 + 2s_2 + \ldots + (n-m)s_{n-m}] + [(n-m+1)s_{n-m+1} + \ldots + (r+1)s_{r+1}] + \\ &+ [(r+2)s_{r+2} + \ldots + (m-r+1)s_{m-r+1}] + [(m-r+2)s_{m-r+2} + \ldots + ns_n] = \\ &= \frac{(n-m+1)(n-m)}{2}(n-1) + \frac{(n-m+r+2)(r+1-n-m)}{2}m + \\ &+ \frac{(m+3)(m-2r)}{2}(m-r) + \frac{(n+1)n}{2}A. \end{aligned}$$

c) Если $m-r \geq n-m \geq r$, то характеры системы (9) будут следующими:

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{r+1} = (n-1) + A,$$

$$s_{r+2} = s_{r+3} = \ldots = s_{n-m} = (n-r-1) + A,$$

$$s_{n-m+1} = s_{n-m+2} = \ldots = s_{m-r+1} = (m-r) + A,$$

$$s_{m-r+2} = s_{m-r+3} = \ldots = s_n = A.$$

Следовательно,

$$Q = [s_1 + s_2 + \ldots + (r+1)s_{r+1}] + [(r+2)s_{r+2} + \ldots + (n-m)s_{n-m}] +$$
$$+ [(n-m-1)s_{n-m-1} + \ldots + (m-r+1)s_{m-r+1}] + [(m-r+2)s_{m-r+2} + \ldots n s_n =$$
$$= \frac{(r+2)(r+1)}{2}(n-1) + \frac{(n-m+r+2)(n-m-r-1)}{2}(n-r-1) +$$
$$+ \frac{(n-r+2)(2m-r-n+1)}{2}(m-r) + \frac{(n+1)n}{2}A.$$

Разрешим систему (9) по лемме Картана, в результате получим систему

$$\nabla \Lambda^n_{p\hat{q}} = \Lambda^n_{p\hat{q}L}\omega^L_0, \ \nabla \Lambda^n_{\hat{i}\hat{j}} = \Lambda^n_{\hat{i}\hat{j}L}\omega^L_0, \ \nabla \Lambda^n_{pK} = \Lambda^n_{pKL}\omega^L_0,$$

$$\nabla \Lambda^\alpha_{iK} = \Lambda^\alpha_{iKL}\omega^L_0, \ \nabla \Lambda^n_{\alpha\hat{\beta}} = \Lambda^n_{\alpha\hat{\beta}L}\omega^L_0, \ \nabla \Lambda^p_{\alpha K} = \Lambda^p_{\alpha KL}\omega^L_0, \tag{10}$$

$$\nabla \Lambda^i_{\alpha K} = \Lambda^i_{\alpha KL}\omega^L_0, \ \nabla \Lambda^i_{pK} = \Lambda^i_{pKL}\omega^L_0, \ \nabla \Lambda^p_{iK} = \Lambda^p_{iKL}\omega^L_0.$$

Найдем N – число новых функций, входящих в правые части уравнений (10). Так как эти функции симметричны по двум последним индексам, то

$$N = \frac{r(r+1)(r+2)}{2} + \frac{(m-r)(m-r+1)(m-r+2)}{2} +$$
$$+ \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2[(n-m-1)m + r(m-r)].$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $N=Q$ во всех трех случаях.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. $\mathscr{VH}$ *-распределение, заданное в репере R_1 системой уравнений (7), (8) существует с произволом $2m(n-m-1) + 2r(m-r)$ функций n аргументов.*

§ 2. Голономность основных структурных подрасслоений $\mathscr{VH}$ -распределения

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\omega^n_0 = 0, \ \omega^i_0 = 0, \ \omega^\alpha_0 = 0, \tag{11}$$

ассоциированную с системой (7) дифференциальных уравнений, задающей $\mathcal{VH}$ -распределение. Тогда уравнения (7) с учетом (11) примут вид

$$\omega_p^n = \Lambda_{pq}^n \omega_0^q, \quad \omega_i^\alpha = \Lambda_{iq}^\alpha \omega_0^q, \quad \omega_p^\alpha = \Lambda_{pq}^\alpha \omega_0^q, \quad \omega_p^i = \Lambda_{pq}^i \omega_0^q,$$
$$\omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha q}^i \omega_0^q, \quad \omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha q}^p \omega_0^q, \quad \omega_i^p = \Lambda_{iq}^p \omega_0^q, \tag{12}$$
$$\omega_0^i = \omega_0^\alpha = \omega_0^n = \omega_\alpha^n = \omega_i^n = 0,$$

где $\Lambda_{[pq]}^n = 0, \ \Lambda_{[pq]}^i = 0, \ \Lambda_{[pq]}^\alpha = 0$.

Система (11) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда $r_{pq}^{\hat{u}} = 0$, где тензор неголономности Λ-распределения $r_{pq}^{\hat{u}}$ задается следующим образом [1]:

$$r_{pq}^{\hat{u}} \overset{def}{=} \{r_{pq}^i, \ r_{pq}^\alpha, \ r_{pq}^n\}, \ \ r_{pq}^{\hat{u}} \overset{def}{=} \tfrac{1}{2}(\Lambda_{pq}^{\hat{u}} - \Lambda_{qp}^{\hat{u}}).$$

В этом случае базисное Λ-распределение определяет $(n-r)$-параметрическое семейство поверхностей V_r (плоскости Λ огибаются поверхностями V_r).

При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_r плоскость L описывает m-вырожденную поверхность V_m^r, а плоскость E описывает $(n-s-1)$ — вырожденную поверхность V_{n-s-1}^r. Таким образом, дифференциальные уравнения (12) в репере 1-го порядка задают пару вырожденных распадающихся гиперполос $\mathcal{H}_m^r$ и $\mathcal{H}_{n-s-1}^r$ ранга r, причем поверхность V_r является их общей направляющей поверхностью.

Итак, обращение в нуль тензора $r_{pq}^{\hat{u}}$ есть условие, при котором пространство $r_{pq}^{\hat{u}}$ расслаивается на $(n-r)$-параметрические семейства m-вырожденных гиперполос $\mathcal{H}_m^r$ и $(n-s-1)$-вырожденных гиперполос $\mathcal{H}_{n-s-1}^r$. С другой стороны, описанный выше образ представляет собой r-мерную регулярную гиперполосу H_r с полем распадающихся характеристик:

$$\Phi_{n-r-1}(A_0) = [E_{n-m-1}(A_0); \ L_s].$$

2. Присоединим уравнения

$$\omega_0^n = 0, \ \ \omega_0^\alpha = 0 \tag{13}$$

к системе дифференциальных уравнений (7), задающей $\mathcal{VH}$ -распределения. Тогда уравнения (7) с учетом (13) примут вид

$$\omega_0^\alpha = \omega_0^n = 0, \quad \omega_\alpha^n = 0,$$

$$\omega_p^n = \Lambda_{pq}^n \omega_0^q, \ \ \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j, \ \ \omega_p^\alpha = \Lambda_{pa}^\alpha \omega_0^a,$$
$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{ia}^\alpha \omega_0^a, \ \ \omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha a}^p \omega_0^a, \ \ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha a}^i \omega_0^a, \tag{14}$$
$$\omega_p^i = \Lambda_{pa}^i \omega_0^a, \ \ \omega_i^p = \Lambda_{ia}^p \omega_0^a,$$

где $\Lambda_{[pq]}^\alpha = 0, \ \Lambda_{[ij]}^\alpha = 0, \ \Lambda_{[pq]}^n = 0, \ \Lambda_{[ij]}^n = 0$.

Система (13) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда

$$r^{\hat{\alpha}}_{ab} = 0, \quad \Lambda^{\alpha}_{pi} = \Lambda^{\alpha}_{ip} = 0 \,. \tag{15}$$

где тензор неголономности M-распределения $r^{\hat{\alpha}}_{ab}$ имеет следующее строение [1]:

$$r^{\hat{\alpha}}_{ab} = \{ r^{\hat{\alpha}}_{pq}, \, r^{\hat{\alpha}}_{ij} \}, \quad r^{\hat{\alpha}}_{ab} = \tfrac{1}{2}(\Lambda^{\hat{\alpha}}_{ab} - \Lambda^{\hat{\alpha}}_{ba}) \,.$$

В этом случае M-распределение определяет $(n-m)$-параметрическое семейство m-мерных поверхностей V_m (плоскости M огибаются поверхностями V_m).

При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_m уравнения (15) при условии (16) определяют регулярную гиперполосу $\mathcal{H}_m$, базисная поверхность которой несет двухкомпонентную сопряженную систему. В этом случае условия

$$\Lambda^{\alpha}_{pi} = \Lambda^{\alpha}_{ip} = 0, \quad \Lambda^{n}_{pi} = \Lambda^{n}_{ip} = 0$$

есть условия сопряженности плоскостей $L(A_0)$ и $\Lambda(A_0)$.

3. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, состоящую из уравнения

$$\omega^n_0 = 0 \tag{16}$$

и уравнений системы (7), задающих $\mathcal{VH}$ -распределение.

В силу (16) система уравнений (7) примет вид

$$\begin{gathered} \omega^n_p = \Lambda^n_{pq}\omega^q_0 , \quad \omega^n_i = \Lambda^n_{ij}\omega^j_0 , \quad \omega^{\alpha}_p = \Lambda^{\alpha}_{p\sigma}\omega^{\sigma}_0 , \\ \omega^{\alpha}_i = \Lambda^{\alpha}_{i\sigma}\omega^{\sigma}_0 , \quad \omega^n_{\alpha} = \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_0 , \quad \omega^p_{\alpha} = \Lambda^p_{\alpha\sigma}\omega^{\sigma}_0 , \\ \omega^i_{\alpha} = \Lambda^i_{\alpha\sigma}\omega^{\sigma}_0 , \quad \omega^i_p = \Lambda^i_{p\sigma}\omega^{\sigma}_0 , \quad \omega^p_i = \Lambda^p_{i\sigma}\omega^{\sigma}_0 , \end{gathered} \tag{17}$$

где $\Lambda^n_{[pq]} = 0, \ \Lambda^n_{[ij]} = 0, \ \ \Lambda^n_{[\alpha\beta]} = 0$.

Уравнение (16) вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда тензор неголономности H-распределения $r^n_{\sigma\tau} = \{ r^n_{pq}, r^n_{ij}, \, r^n_{\alpha\beta} \}$ обращается в нуль:

$$r^n_{\sigma\tau} = 0 \Leftrightarrow r^n_{\sigma\tau} = \tfrac{1}{2}(\Lambda^n_{\sigma\tau} - \Lambda^n_{\tau\sigma}) = 0 \,.$$

В этом случае оснащающее H-распределение определяет однопараметрическое семейство гиперповерхностей V_{n-1} (плоскости H огибаются поверхностями V_{n-1}), несущих трехкомпонентную сильно взаимную систему плоскостей (Λ, L, E). Системы (16), (17) задают одну из этих гиперповерхностей V_{n-1}.

Таким образом, проективно-дифференциальную геометрию $\mathcal{VH}$ -распределений пространства P_n можно применить для изучения вырожденных гиперполос, m-мерных гиперполос, несущих двухкомпонентную сопряженную систему и гиперповерхностей $V_{n-1} \subset P_n$, несущих трехкомпонентную сильно взаимную систему плоскостей.

§ 3. Основные квазитензоры $\mathcal{VH}$ -распределения

Из уравнений (8) следует, что совокупность величин $\{\Lambda^n_{pq}\}, \{\Lambda^n_{ij}\}, \{\Lambda^n_{\alpha\beta}\}$ образуют тензоры 1-го порядка – фундаментальные тензоры соответственно Λ-, L-, E-подрасслоений.

Согласно структуре $\mathcal{VH}$ -распределения полагаем, что эти тензоры невырожденные:

$$\Lambda_0 \overset{def}{=} det\left\|\Lambda^n_{pq}\right\| \neq 0,\ L_0 \overset{def}{=} det\left\|\Lambda^n_{ij}\right\| \neq 0,\ E_0 \overset{def}{=} det\left\|\Lambda^n_{\alpha\beta}\right\| \neq 0 . \tag{18}$$

Отсюда следует, что

$$M_0 \overset{def}{=} det\left\|\Lambda^n_{ab}\right\| \neq 0,\ \Phi_0 \overset{def}{=} det\left\|\Lambda^n_{uv}\right\| \neq 0,\ \Psi_0 \overset{def}{=} det\left\|\Lambda^n_{AB}\right\| \neq 0,\ H_0 \overset{def}{=} \left\|\Lambda^n_{\sigma\rho}\right\| \neq 0 , \tag{19}$$

где $\{\Lambda^n_{ab}\}, \{\Lambda^n_{uv}\}, \{\Lambda^n_{AB}\}, \{\Lambda^n_{\sigma\rho}\}$ - фундаментальные тензоры соответственно M-, Φ-, Ψ-, H-подрасслоений данного $\mathcal{VH}$ -распределения.

В дальнейшем Λ-, L-, E-, M-, Φ-, Ψ-, H-подрасслоения (∗) назовем основными структурными подрасслоениями данного $\mathcal{VH}$ -распределения. В силу (19), (20) можно ввести в рассмотрение обращенные тензоры 1-го порядка $\{\Lambda^{pq}_n\}, \{\Lambda^{ij}_n\}, \{\Lambda^{\alpha\beta}_n\}, \{\Lambda^{ab}_n\}, \{\Lambda^{uv}_n\}, \{\Lambda^{AB}_n\}, \{\Lambda^{\sigma\rho}_n\}$, удовлетворяющие уравнениям вида

$$\nabla\lambda^{\sigma\rho}_n - \lambda^{\sigma\rho}_n\omega^0_0 \equiv 0 . \tag{20}$$

Заметим, что величины Λ_0, L_0, E_0, M_0, Φ_0, Ψ_0, H_0 являются относительными инвариантами:

$$\begin{gathered} d\ln\Lambda_0 = 2\omega^p_p - r(\omega^0_0 + \omega^n_n) + \Lambda_K\omega^K_0 , \\ d\ln L_0 = 2\omega^i_i - s(\omega^0_0 + \omega^n_n) + L_K\omega^K_0 , \\ d\ln E_0 = 2\omega^\alpha_\alpha - (n-m-1)(\omega^0_0 + \omega^n_n) + E_K\omega^K_0 , \\ d\ln M_0 = 2\omega^a_a - m(\omega^0_0 + \omega^n_n) + \tilde{M}_K\omega^K_0 , \\ d\ln\Phi_0 = 2\omega^u_u - (n-r-1)(\omega^0_0 + \omega^n_n) + \Phi_K\omega^K_0 , \\ d\ln\Psi_0 = 2\omega^A_A - (n-s-1)(\omega^0_0 + \omega^n_n) + \Psi_K\omega^K_0 , \\ d\ln H_0 = 2\omega^\sigma_\sigma - (n-1)(\omega^0_0 + \omega^n_n) + \tilde{H}_K\omega^K_0 , \end{gathered} \tag{21}$$

где $\Lambda_K = \Lambda^{qp}_n\Lambda^n_{pqK}$, $L_K = \Lambda^{ji}_n\Lambda^n_{ijK}$, $E_K = \Lambda^{\beta\alpha}_n\Lambda^n_{\alpha\beta K}$,
$\tilde{M}_K = \Lambda^{ba}_n\Lambda^n_{abK}$, $\Phi_K = \Lambda^{vu}_n\Lambda^n_{uvK}$, $\Psi_K = \Lambda^{BA}_n\Lambda^n_{ABK}$, $\tilde{H}_K = \Lambda^{\rho\sigma}_n\Lambda^n_{\sigma\rho K}$.

Продолжение уравнений (21) с учетом (7) приводит к следующим уравнениям:

$$\nabla\Lambda_K + \Lambda_K\omega^0_0 + (r+2)\delta^p_K\omega^0_p + r\delta^v_K\omega^0_v - (r+2)\Lambda^n_{qK}\omega^q_n - r\Lambda^n_{vK}\omega^v_n \equiv 0 ,$$

$$\nabla L_K + L_K\omega^0_0 + (s+2)\delta^i_K\omega^0_i + s\delta^A_K\omega^0_A - (s+2)\Lambda^n_{iK}\omega^i_n - s\Lambda^n_{AK}\omega^A_n \equiv 0 ,$$

$$\nabla E_K + E_K\omega_0^0 + (n-m+1)\delta_K^\alpha\omega_\alpha^0 + (n-m-1)\delta_K^a\omega_a^0 -$$
$$-(n-m+1)\Lambda_{\beta K}^n\omega_n^\beta - (n-m-1)\Lambda_{aK}^n\omega_n^a \equiv 0,$$

$$\nabla\widetilde{M}_K + \widetilde{M}_K\omega_0^0 + (m+2)\delta_K^a\omega_a^0 + m\delta_K^\alpha\omega_\alpha^0 - (m+2)\Lambda_{aK}^n\omega_n^a - m\Lambda_{\alpha K}^n\omega_n^\alpha \equiv 0, \quad (22)$$

$$\nabla\Phi_K + \Phi_K\omega_0^0 + (n-r-1)\delta_K^p\omega_p^0 + (n-r+1)\delta_K^v\omega_v^0 -$$
$$-(n-r-1)\Lambda_{pK}^n\omega_n^p - (n-r+1)\Lambda_{vK}^n\omega_n^v \equiv 0,$$

$$\nabla\Psi_K + \Psi_K\omega_0^0 + (n-s-1)\delta_K^i\omega_i^0 + (n-s+1)\delta_K^A\omega_A^0 -$$
$$-(n-s-1)\Lambda_{iK}^n\omega_n^i - (n-s+1)\Lambda_{AK}^n\omega_n^A \equiv 0,$$

$$\nabla\widetilde{H}_K + \widetilde{H}_K\omega_0^0 + (n+1)\delta_K^\sigma\omega_\sigma^0 - (n+1)\Lambda_{\sigma K}^n\omega_n^\sigma \equiv 0\,.$$

Известно [1], [4], что дифференциальные уравнения вида

$$\nabla\nu_n^\sigma + \omega_n^\sigma = \nu_{nK}^\sigma\omega_0^K \ \text{(а)}, \quad \nabla\nu_\sigma^0 + \omega_\sigma^0 = \nu_{\sigma K}^0\omega_0^K \ \text{(б)} \quad (23)$$

задают соответственно поля нормалей 1-го рода Нордена (24 а) и поля нормалей 2-го рода Нордена (24 б) структурных подрасслоений (*) (полагая последовательно σ=p, i, α, a, u, A).

С помощью обращенных тензоров 1-го порядка введем в рассмотрение группу основных квазитензоров 1-го порядка

$$\begin{gathered}\Lambda_n^\alpha = \tfrac{1}{r}\Lambda_{pq}^\alpha\Lambda_n^{qp},\ L_n^\alpha = \tfrac{1}{s}\Lambda_{ij}^\alpha\Lambda_n^{ji},\ \tilde{M}_n^\alpha = \tfrac{1}{m}\Lambda_{ab}^\alpha\Lambda_n^{ba},\ (a)\\ \Lambda_n^i = \tfrac{1}{r}\Lambda_{pq}^i\Lambda_n^{qp},\ \Lambda_n^u = \tfrac{1}{r}\Lambda_{pq}^u\Lambda_n^{qp}\end{gathered} \quad (24)$$

и основных квазитензоров 2-го порядка

$$\begin{gathered}L_n^p = \tfrac{1}{s}\Lambda_{ij}^p\Lambda_n^{ji},\ E_n^p = \tfrac{1}{n-m-1}\Lambda_{\alpha\beta}^p\Lambda_n^{\beta\alpha},\ \Phi_n^p = \tfrac{1}{n-r-1}\Lambda_{uv}^p\Lambda_n^{vu},\ E_n^a = \tfrac{1}{n-m-1}\Lambda_{\alpha\beta}^a\Lambda_n^{\beta\alpha},\\ E_n^i = \tfrac{1}{n-m-1}\Lambda_{\alpha\beta}^i\Lambda_n^{\beta\alpha},\ \Psi_n^i = \tfrac{1}{n-s-1}\Lambda_{AB}^i\Lambda_n^{AB},\ L_n^A = \tfrac{1}{s}\Lambda_{ij}^A\Lambda_n^{ji},\end{gathered} \quad (25)$$

каждый из которых удовлетворяет уравнению вида (24 а).

Аналогично, в силу уравнений (8), (20) убеждаемся, что каждый из квазитензоров 1-го порядка

$$e_i^0 = -\tfrac{1}{n-m-1}\Lambda_{i\alpha}^\alpha,\ e_p^0 = -\tfrac{1}{n-m-1}\Lambda_{p\alpha}^\alpha,\ l_p^0 = -\tfrac{1}{s}\Lambda_{pi}^i,\ e_a^0 = -\tfrac{1}{n-m-1}\Lambda_{a\alpha}^\alpha \quad (26)$$

и квазитензоров 2-го порядка

$$\lambda_i^0 = -\tfrac{1}{r}\Lambda_{ip}^p,\ \lambda_\alpha^0 = -\tfrac{1}{r}\Lambda_{\alpha p}^p,\ l_\alpha^0 = -\tfrac{1}{s}\Lambda_{\alpha i}^i,\ \lambda_v^0 = -\tfrac{1}{r}\Lambda_{vp}^p,\ l_A^0 = -\tfrac{1}{s}\Lambda_{Ai}^i \quad (27)$$

удовлетворяет одному из уравнений вида (23 б).

В результате справедлива

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 1-го порядка $\mathcal{VH}$ -распределение внутренним инвариантным образом порождает*

а) поля нормалей 1-го рода Нордена: $\{\lambda_n^\alpha\}, \{L_n^\alpha\}, \{\widetilde{M}_n^\alpha\}$ E-подрасслоения, $\{\lambda_n^i\}$ L-подрасслоения, $\{\lambda_n^u\}$ Ф-подрасслоения;

б) поля нормалей 2-го рода Нордена: $\{e_p^0\}, \{l_p^0\}$ Λ-подрасслоения, $\{e_i^0\}$ L-подрасслония, $\{e_a^0\}$ M-подрасслоения.

В дифференциальной окрестности 2-го порядка $\mathcal{VH}$ -распределение внутренним инвариантным образом порождает

а) поля нормалей 1-го рода Нордена: $\{L_n^p\}$, $\{E_n^p\}$, $\{\Phi_n^p\}$ Λ-подрасслоения, $\{E_n^i\}$, $\{\Psi_n^i\}$ L-подрасслоения, $\{E_n^a\}$ M-подрасслоения, $\{\Lambda_n^A\}$ Ψ-подрасслоения.

б) поля нормалей 2-го рода Нордена: $\{\lambda_\alpha^0\}$, $\{l_\alpha^0\}$ E-подрасслоения, $\{\lambda_i^o\}$ L-подрасслоения, $\{\lambda_\nu^0\}$ Φ-подрасслоения, $\{l_A^0\}$ Ψ-подрасслоения.

§ 4. Нормализации основных структурных подрасслоений $\mathcal{VH}$ -распределения

1. Следуя работам [2], [4], систему величин $\{K_\sigma\}$ назовем квазинормалью $\mathcal{VH}$ -распределения, если в выбранном репере R_1 при преобразованиях стационарной подгруппы элемента распределения (при фиксации центра A_0) имеем один из следующих законов преобразования $\{K_\sigma\}$:

$$\nabla_\sigma K_\sigma + K_\sigma \pi_0^0 = \Lambda_{\sigma\rho}^n \pi_n^\rho + \pi_\sigma^0, \tag{28}$$

$$\nabla_\sigma K_\sigma + K_\sigma \pi_0^0 = \Lambda_{\rho\sigma}^n \pi_n^\rho - \pi_\sigma^0. \tag{29}$$

Отметим, что если в (28), (29) σ положить равным p, i, α, v, a, A, то уравнения (29), (30) задают квазинормали соответствующие структурным подрасслоениям (∗).

Квазинормаль $\{K_\sigma\}$ первого типа (28) устанавливает биекцию следующего вида между нормалями 1-го и 2-го рода структурного подрасслоения:

$$\nu_n^\sigma = -\Lambda_n^{\sigma\rho}(\nu_\rho^0 - K_\rho), (a) \quad \nu_\sigma^0 = -\Lambda_{\sigma\rho}^n \nu_n^\rho - K_\sigma, (б) \tag{30}$$

а квазинормаль $\{K_\sigma\}$ второго типа (29) задает это соответствие таким образом:

$$\nu_n^\sigma = \Lambda_n^{\rho\sigma}(\nu_\rho^0 - K_\rho), (a) \quad \nu_\sigma^0 = \Lambda_{\rho\sigma}^n \nu_n^\rho + K_\sigma, (б) \tag{31}$$

В силу (9) убеждаемся, что функции 1-го порядка

$$t_p \overset{def}{=} \Lambda_{pn}^n, \; t_i \overset{def}{=} \Lambda_{ni}^i, \; t_a \overset{def}{=} \Lambda_{an}^n, \; t_v \overset{def}{=} \Lambda_{vn}^n, \; t_A \overset{def}{=} \Lambda_{An}^n, \; t_\sigma \overset{def}{=} \Lambda_{\sigma n}^n, \mathrm{t}_\alpha \overset{def}{=} \Lambda_{\alpha n}^n$$

удовлетворяют уравнениям (28), т.е являются квазинормалями 1-го типа и 1-го порядка соответствующих структурных подрасслоений (∗).

Согласно уравнениям (22) следующие совокупности величин (функций)

$$\begin{gathered} K_p^2 \overset{def}{=} \tfrac{1}{r+2}\Lambda_p, \; K_p^3 \overset{def}{=} \tfrac{1}{s} L_p, \; K_p^4 \overset{def}{=} \tfrac{1}{n-m-1} E_p, \; K_p^5 \overset{def}{=} \tfrac{1}{m+2} \tilde{M}_p, \\ K_p^6 \overset{def}{=} \tfrac{1}{n-r-1}\Phi_p, \; K_p^7 \overset{def}{=} \tfrac{1}{n-s+1}\Psi_p, \; K_p^8 \overset{def}{=} \tfrac{1}{n+1}\tilde{H}_p \end{gathered} \tag{32}$$

удовлетворяют уравнениям (29), и следовательно, являются квазинормалями 2-го типа и 2-го порядка Λ-подрасслоения.

Аналогично убеждаемся в силу уравнений (28), (29), что величины

$$K_i^2 = \tfrac{1}{r}\Lambda_i,\ K_i^3 = \tfrac{1}{s+2}L_i,\ K_i^4 = \tfrac{1}{n-m-1}E_i,\ K_i^5 = \tfrac{1}{m+2}\widetilde{M}_i,$$
$$K_i^6 = \tfrac{1}{n-r+1}\Phi_i,\ K_i^7 = \tfrac{1}{n-s-1}\Psi_i,\ K_i^8 = \tfrac{1}{n+1}\widetilde{H}_i,$$

а также величин

$$K_\alpha^2 = \tfrac{1}{r}\Lambda_\alpha,\ K_\alpha^3 = \tfrac{1}{s}L_\alpha,\ K_\alpha^4 = \tfrac{1}{n-m+1}E_\alpha,\ K_\alpha^5 = \tfrac{1}{m}\tilde{M}_\alpha,$$
$$K_\alpha^6 = \tfrac{1}{n-r+1}\Phi_\alpha,\ K_\alpha^7 = \tfrac{1}{n-s+1}\Psi_\alpha,\ K_\alpha^8 = \tfrac{1}{n+1}\tilde{H}_\alpha, \qquad (33)$$

являются квазинормалями 2-го порядка соответственно L-, E-подрасслоений.

Наконец, в дифференциальной окрестности 2-го порядка находим следующие характерные квазинормали:

а) для M-подрасслоения:

$$\tilde{K}_a^1 = \tfrac{1}{n-m-1}E_a;\ \tilde{K}_a^2 = \tfrac{1}{m+2}\tilde{M}_a;\ \tilde{K}_a^3 = \tfrac{1}{n+1}\tilde{H}_a;$$

b) для Φ-подрасслоения:

$$\tilde{K}_v^1 = \tfrac{1}{r}\Lambda_v;\ \tilde{K}_v^2 = \tfrac{1}{n-r+1}\Phi_v;\tilde{K}_v^3 = \tfrac{1}{n+1}\tilde{H}_v;$$

c) для Ψ-подрасслоения:

$$\tilde{K}_A^1 = \tfrac{1}{s}L_A;\ \tilde{K}_A^2 = \tfrac{1}{n-s+1}\Psi_A;\ \tilde{K}_A^3 = \tfrac{1}{n+1}\tilde{H}_A.$$

2. Исходя из построенных ранее нормалей 1-го рода (25) для Λ-подрасслоения и квазинормалей (32) в силу биекций (30 б), (31 б) находим им соответствующие нормали 2-го рода:

а) в дифференциальной окрестности 1-го порядка

$$L_p^0 = -\Lambda_{pq}^n L_n^q - t_p,\ E_p^0 = -\Lambda_{pq}^n E_n^q - t_p,\ \Phi_p^0 = -\Lambda_{pq}^n \Phi_n^q - t_p;$$

б) в дифференциальной окрестности 2-го порядка ($\varepsilon = \overline{2,8}$):

$$\underset{(\varepsilon)}{\mathscr{L}_p^0} = \Lambda_{qp}^n L_n^q + K_p^\varepsilon,\ \underset{(\varepsilon)}{\mathscr{E}_p^0} = \Lambda_{qp}^n E_n^q + K_p^\varepsilon,\ \underset{(\varepsilon)}{\Phi_p^0} = \Lambda_{qp}^n \Phi_n^q + K_p^\varepsilon.$$

Следовательно, имеет место

Теорема 4. *На $\mathscr{VH}$ -распределении к Λ-подрасслоению внутренним инвариантным образом можно присоединить 24 нормализации в смысле Нордена:*

а) $(L_n^p;\ L_p^0)$, $(E_n^p;\ E_p^0)$, $(\Phi_n^p;\ \Phi_p^0)$ *в дифференциальной окрестности 1-го порядка;*

b) $(L_n^p;\ \underset{(\varepsilon)}{\mathscr{L}_p^0})$, $(E_n^p;\ \underset{(\varepsilon)}{\mathscr{E}_p^0})$, $(\Phi_n^p;\ \underset{(\varepsilon)}{\Phi_p^0})$ *в дифференциальной окрестности 2-го порядка* ($\varepsilon = \overline{2,8}$).

В силу уравнений (8), (28), (29) убеждаемся, что функции

$$\Lambda_i^0 = -\Lambda_{ij}^n \Lambda_n^j - t_i,\ \underset{(\varepsilon)}{\mathscr{E}_i^0} = \Lambda_{ji}^n E_n^j + K_i^\varepsilon,\ \underset{(\varepsilon)}{\Psi_i^0} = \Lambda_{ji}^n \Psi_n^j + K_i^\varepsilon,$$

$$\underset{(\varepsilon)}{\Lambda_i^0} = \Lambda_{ji}^n + K_i^\varepsilon,\ E_i^0 = -\Lambda_{ij}^n E_n^j - t_i,\ \Psi_i^0 = -\Lambda_{ij}^n \Psi_n^j - t_i$$

являются квазитензорами. Следовательно, справедлива

Теорема 5. *На $\mathscr{VH}$ -распределении к L-подрасслоению внутренним инвариантным образом присоединяются 24 нормализации в смысле Нордена:*

a) $(\Lambda_n^i, \Lambda_i^0)$ *в окрестности 1-го порядка;*

b) $(E_n^i; \underset{(\varepsilon)}{\mathscr{E}_i^0}), (\Psi_n^i; \underset{(\varepsilon)}{\Psi_i^0}), (\Lambda_n^i; \underset{(\varepsilon)}{\Lambda_i^0}), (E_n^i, E_i^0), (\Psi_n^i, \Psi_i^0)$ *в окрестности 2-го порядка* $(\varepsilon = \overline{2,8})$.

Аналогично, в силу биекции (30 б), (31 б) квазитензорам (24 а) поставим в соответствие квазитензоры

$$\Lambda_\alpha^0 = -\Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_n^\beta - t_\alpha;\ \mathscr{L}_\alpha^0 = -\Lambda_{\alpha\beta}^n L_n^\beta - t_\alpha;\ \tilde{M}_\alpha^0 = -\Lambda_{\alpha\beta}^n \tilde{M}_n^\beta - t_\alpha \tag{34}$$

1-го порядка и квазитензоры 2-го порядка

$$\underset{(\varepsilon)}{\lambda_\alpha^0} = \Lambda_{\beta\alpha}^n \Lambda_n^\beta + K_\alpha^\varepsilon;\ \underset{(\varepsilon)}{l_\alpha^0} = \Lambda_{\beta\alpha}^n L_n^\beta + K_\alpha^\varepsilon;\ \underset{(\varepsilon)}{\tilde{m}_\alpha^0} = \Lambda_{\beta\alpha}^n \tilde{M}_n^\beta + K_\alpha^\varepsilon. \tag{35}$$

Из соотношений (34), (35) следует

Теорема 6. *$\mathscr{VH}$ -распределение внутренним инвариантным образом порождает 24 нормализации E-подрасслоения:*

a) $(\Lambda_n^\alpha; \Lambda_\alpha^0), (L_n^\alpha; \mathscr{L}_\alpha^0), (\tilde{M}_n^\alpha; \tilde{M}_\alpha^0)$ *в окрестности 1-го порядка;*

b) $(\Lambda_n^\alpha; \underset{(\varepsilon)}{\lambda_\alpha^0}), (L_n^\alpha; \underset{(\varepsilon)}{l_\alpha^0}); (\tilde{M}_n^\alpha; \underset{(\varepsilon)}{\tilde{m}_\alpha^0})$ *в окрестности 2-го порядка.*

Исходя из построенных ранее нормалей 1-го рода $\{E_c^a\}$ (26), $\{\Lambda_n^u\}$ (25), $\{L_n^A\}$ (26) для *M*-, *Φ*-, *Ψ*-подрасслоений в силу биекций (31 б), (30 б) находим соответствующие им нормали 2-го рода ($\delta = 1, 2, 3$):

$$\begin{gathered}\underset{(\delta)}{\mathscr{E}_a^0} = \Lambda_{ca}^n E_n^z + \tilde{K}_a^\delta;\ \underset{(\delta)}{\lambda_v^0} = \Lambda_{uv}^n \Lambda_n^u + \tilde{K}_v^\delta;\ \underset{(\delta)}{\mathscr{L}_A^0} = \Lambda_{BA}^n L_n^B + \tilde{K}_A^\delta;\\ \varepsilon_a^0 = -\Lambda_{ac}^n E_n^c - t_a;\ \Lambda_u^0 = -\Lambda_{uv}^n \Lambda_n^v - t_u;\ l_A^0 = -\Lambda_{AB}^n L_n^B - t_A.\end{gathered} \tag{36}$$

Таким образом, согласно (36) имеет место

Теорема 7. *$\mathscr{VH}$ -распределение порождает внутренним инвариантным образом по 4 нормализации в смысле Нордена соответственно М-, Ф-, Ψ-подрасслоений (δ=1, 2, 3):*

a) $(E_n^a; \underset{(\delta)}{\mathscr{E}_a^0}), (\Lambda_n^v; \underset{(\delta)}{\lambda_v^0}), (L_A^B; \underset{(\delta)}{\mathscr{L}_B^0}), (E_n^a; \varepsilon_a^0), (L_n^B; l_B^0)$ *2-го порядка;*

b) одну нормализацию $(\Lambda_n^v; \Lambda_v^0)$ *1-го порядка.*

3. Построим нормализации структурных подрасслоений, исходя из квазитензоров 1-го порядка $\{e_q^0\}$, $\{l_q^0\}$ (26). Используя биекции (30 а), (31 а), находим для *Λ*-подрасслоения соответствующие нормали 1-го рода:

a) $e_n^p = \Lambda_n^{qp}(e_q^0 - t_q),\ l_n^p = \Lambda_n^{qp}(l_q^0 - t_q)$ в окрестности 1-го порядка,

b) $\underset{(\varepsilon)}{E_n^p} = \Lambda_n^{qp}(e_q^0 - K_q^\varepsilon),\ \underset{(\varepsilon)}{\mathscr{L}_n^p} = \Lambda_n^{qp}(l_q^0 - K_q^\varepsilon)$ в окрестности 2-го порядка.

Отсюда вытекает

Теорема 8. *$\mathscr{VH}$ -распределение порождает 16 внутренних нормализаций, ассоциированных с Λ-подрасслоением:*

a) $(e_n^p; e_p^0), (l_n^p; l_p^0)$ *в окрестности 1-го порядка;*

b) 14 нормализаций $(\underset{(\varepsilon)}{E_n^p}; e_p^0), (\underset{(\varepsilon)}{\mathscr{L}_n^p}; l_p^0)$ *в окрестности 2-го порядка* $(\varepsilon = \overline{2,8})$.

Аналогично, исходя из квазитензоров $\{e_j^0\}$ (26), $\{\lambda_j^0\}$ (27) в силу биекций (30 а), (31 а) находим для L-подрасслоения нормаль 1-го рода:

a) $\underset{(\varepsilon)}{\lambda_n^i} = \Lambda_n^{ji}(\lambda_j^0 - K_j^\varepsilon)$, $\underset{(\varepsilon)}{\mathscr{E}_n^{\,i}} = \Lambda_n^{ji}(e_j^0 - K_j^\varepsilon)$, $\lambda_n^i = \Lambda_n^{ji}(\lambda_j^0 - t_j)$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка,

b) $\varepsilon_n^i = \Lambda_n^{ji}(e_j^0 - t_j)$ в дифференциальной окрестности 1-го порядка.

Отсюда следует

Теорема 9. $\mathscr{VH}$ *-распределение порождает внутренним инвариантным образом 15 нормализаций L-подрасслоения в дифференциальной окрестности 2-го порядка:*

$$(\underset{(\varepsilon)}{\lambda_n^i};\, \lambda_i^0),\ (\underset{(\varepsilon)}{\mathscr{E}_n^{\,i}};\, e_i^0),\ (\lambda_n^i;\, \lambda_i^0)$$

и одну нормализацию $(\varepsilon_n^i;\, e_i^0)$ *в дифференциальной окрестности 1-го порядка.*

Нормали $\{\lambda_\alpha^0\}$, $\{l_\alpha^0\}$ (27) 2-го рода *E*-подрасслоения в силу биекции (30 а), (31 а) и квазинормалей (33), $\{t_\beta\}$ порождают в дифференциальной окрестности 2-го порядка 16 нормалей 1-го рода:

$$\underset{(\varepsilon)}{\lambda_n^\alpha} = \Lambda_n^{\beta\alpha}(\lambda_\beta^0 - K_\beta^\varepsilon);\ \underset{(\varepsilon)}{l_n^\alpha} = \Lambda_n^{\beta\alpha}(l_\beta^0 - K_\beta^\varepsilon),$$

$$\lambda_n^\alpha = \Lambda_n^{\beta\alpha}(\lambda_\beta^0 - t_\beta);\ \mathscr{L}_n^{\,\alpha} = \Lambda_n^{\beta\alpha}(l_\beta^0 - t_\beta).$$

Следовательно, имеет место

Теорема 10. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка к E-подрасслоению можно внутренним инвариантным образом присоединить 16 нормализаций* $(\underset{(\varepsilon)}{\lambda_n^\alpha};\, \lambda_\beta^0)$, $(\underset{(\varepsilon)}{l_n^\alpha};\, l_\beta^0)$, $(\lambda_n^\alpha,\, \lambda_\beta^0)$, $(\mathscr{L}_n^{\,\alpha};\, l_\beta^0)$ *в смысле Нордена.*

Аналогично теореме 7 доказывается

Теорема 11. $\mathscr{VH}$ *-распределение внутренним инвариантным образом порождает* ($\delta = 1, 2, 3$):

а) три нормализации $(\underset{(\delta)}{e_n^a};\, e_a^0)$ *в окрестности 2-го порядка и одну нормализацию* $(e_n^a;\, e_a^0)$ *в окрестности 1-го порядка M-подрасслоения;*

б) четыре нормализации $(\underset{(\delta)}{\lambda_n^v};\, \lambda_v^0)$, $(\lambda_n^v;\, \lambda_v^0)$ *в окрестности 2-го порядка Ф- подрасслоения;*

в) четыре нормализации $(\underset{(\delta)}{l_n^A};\, l_B^0)$, $(l_n^A;\, l_B^0)$ *в окрестности 2-го порядка Ψ-подрасслоения.*

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства : монография. СПб., 1992.

2. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности// Тр. геом. семинара. ВИНИТИ АН СССР. М., 1971. Т.3. С. 49-94.

3. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. // Там же. 1973. Т.4. С. 71-120.

4. *Столяров А. В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов// Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М., 1975. Т.7. С. 117-151.

5. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. // Тр. моск. мат. об-ва. 1953. Т.2. С. 275-382.

Об авторе

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: yurij.popoff2015@mail.ru

About the author

Dr Juriy Popov – ass. prof., I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: yurij.popoff2015@mail.ru